Trigonometrie

Klassenstufe 10

Trigonometrische Formeln

mit vielen Beweisen

Datei Nr. 16130

Stand 15. Juli 2008

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieses Stoffgebiet wird nur noch exemplarisch in der Klassenstufe 10 behandelt. Viele Lehrer streichen ihn einfach, weil die Zeit dafür zu knapp ist. Dann hört man Hinweise darauf, wie „Da gibt es eine Umrechnungsformel, die man anwenden kann“ und es wird auf Formelsammlungen verwiesen.

Dennoch sollten exemplarischen zwei oder drei Formel hergeleitet werden.

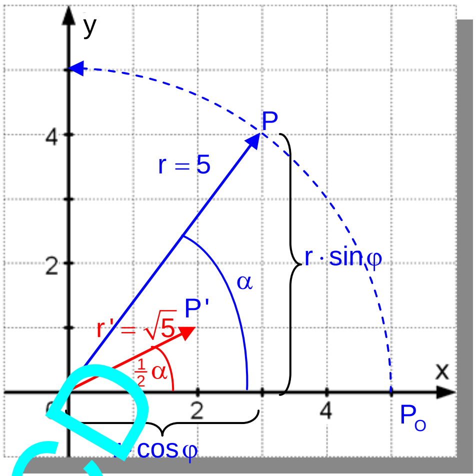
Von großer Bedeutung ist nach wie vor die Berechnung von Schnittwinkeln zwischen Geraden, die auf der Formel $\tan\gamma = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ beruht.

Je nach Thema gibt es weitere Einsatzmöglichkeiten.

Hier jedenfalls eine große Sammlung für Interessierte.

Inhalt

5. Ein Problem aus der Analytischen Geometrie oder der Gaußschen Zahlenebene



Eine Abbildung soll nach dieser Vorschrift aus P den Bildpunkt P' erzeugen:

(1) $\overline{OP'} = \sqrt{\overline{OP}}$

(2) $\sphericalangle P_OOP' = \frac{1}{2} \sphericalangle P_OOP$

Die Vorschrift (2) besagt, dass der Steigungswinkel der Strecke OP halbiert werden soll.

Als Beispiel sei der Punkt $P(3|4)$ genommen.

Für den Steigungswinkel der Strecke OP folgt $\tan\alpha = \frac{4}{3}$.

und die Länge der Strecke OP ist $r = \overline{OP} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Für die Lage des Bildpunktes P' benötigen wir dessen „Radius“

$r' = \overline{OP'} = \sqrt{\overline{OP}} = \sqrt{5}$ und den zugehörigen Winkel $\frac{\alpha}{2}$.

Würden wir nun über die Gleichung $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ den Winkel α berechnen wollen, geht dies nur mit Taschenrechner und der liefert nur einen Näherungswert: $\alpha = \arctan\frac{4}{3} \approx 63{,}13^{\circ}$.

Daher gehen wir trickreich vor: Mit Hilfe der Gleichung $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

berechnen wir aus $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ exakt $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Da P im 1. Feld liegt, ist $0 < \alpha < 90^{\circ}$, also ist $\cos\alpha > 0$.

Diesen Wert erhält man auch trigonometrisch mit obiger Abbildung.

Nun benötigen wir die Formeln für den halben Winkel:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Damit berechnen wir

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Zwischenergebnis:

$$\text{Aus } \tan\alpha = \frac{4}{3} \text{ folgt } \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Berechnung der Koordinaten des Bildpunktes P':

$$x_{P'} = r' \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{5} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{5} = 2$$

$$y_{P'} = r' \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{5}\sqrt{5} = 1$$

Ergebnis: $P'(2|1)$

Anmerkung:

Dieses Beispiel ist der Datei Komplexe Zahlen Teil 3 entnommen. Komplexe Zahlen kann man in der Gaußschen Zahlenebene als Punkt darstellen. P stellt so die Zahl a = 3 + 4i dar. Und unsere Abbildung zieht aus dieser Zahl die Wurzel.

Es ist also $\sqrt{3+4i} = 2+i$

Aufgabe 4: Berechne die Bildpunkte zu $Q(5|12)$ und $R(-4|3)$.